А.М.Молчанов

МАКРОДИНАМИКА

Введение

Термодинамический подход далеко не всегда достаточен при изучении многокомпонентных систем, важных для естествознания.

Главная причина состоит в том, что функционирование подобных систем (особенно биологических) происходит обычно вдали от положения термодинамического равновесия. Весьма стеснительным является также (характерное для термодинамических рассмотрений) предположение малости взаимодействия или какое-нибудь аналогичное[1] предположение о наличии в системе малого параметра. В результате теоретические выводы часто мало пригодны для понимания реальных ситуаций.

Крайне важно, поэтому, изучение таких систем (даже модельных), поведение которых можно проследить теоретически в широком диапазоне условий — «в целом».

1°. Градиентные системы

Рассмотрим в пространстве векторов x

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_s \end{pmatrix} \tag{1}$$

произвольную скалярную функцию h — гамильтониан —

$$h = h(x) \tag{2}$$

и произвольную матрицу I

$$I = \left(\begin{pmatrix} I_{11} \dots I_{1s} \\ \dots \dots \dots \\ I_{s1} \dots I_{ss} \end{pmatrix}\right) \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами.

Система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = I\left(\frac{dh}{dx}\right)^* \tag{4}$$

---

[1] Малая плотность, приближение сильной связи и т.п.

Г.Н.Борисюк, Р.М.Борисюк, А.Б.Кириллов, Е.И.Коваленко, В.И.Крюков.
Новые методы анализа нейронной активности.
Пущино: НЦБИ АН СССР, 1986.

называется градиентной[1] *системой или* (I, h)-*системой.* Звездочка $*$, превращающая строку в столбец

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_s}\right)^* = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_s} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

необходима для «выравнивания тензорной размерности» левой и правой части системы уравнений.

В частном случае матрицы I, такой, что

$$I^2 = -E \tag{6}$$

(при четной размерности s фазового пространства), возникает собственно гамильтонова система.

Пример I.

Пусть $\quad x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad h = h(p, q), \quad I = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$

Тогда $\quad \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial p} \\ \dfrac{\partial h}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial q} \\ \dfrac{\partial h}{\partial p} \end{pmatrix}$

и в координатной записи

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial h}{\partial q} \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial h}{\partial p} \end{cases} \tag{7}$$

получается простейшая гамильтонова система на плоскости (одна степень свободы). Если, кроме того положить

$$h(p, q) = \frac{p^2}{2m} + U(q), \tag{8}$$

то получаются уравнения движения материальной точки массы m в потенциальном поле $U(q)$.

Пример II.

Рассмотрим случай, когда

$$x = \begin{pmatrix} p \\ q \\ z \end{pmatrix}, \quad h = h(p, q, z), \quad I = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

[1] Впервые введены в работе А.М.Обухова (О симметризуемых нелинейных системах. ДАН СССР, 1977, т. 233, с. 35—38) под названием «симметризуемых» систем. Для наших целей удобнее несколько изменить обозначения и опустить требование невырожденности матрицы I.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial h}{\partial q} \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial h}{\partial p} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \tag{9}$$

После дифференцирования функции $h(p,q,z)$ в силу системы (9) получается:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial h}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial h}{\partial z}\dot{z} = \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 \geqslant 0\,. \tag{10}$$

Следовательно, гамильтониан h является одновременно функцией Четаева системы, порожденной этим гамильтонианом.

Если, в частности, $h(p,q,z)$ не зависит от z:

$$\frac{\partial h}{\partial z} \equiv 0,$$

то из уравнений (9) получаются уравнения (7).

2°. Парное взаимодействие

Пусть уравнения движения макросистемы, состоящей из большого[1] числа $N \gg 1$ одинаковых компонент x_i, задаются гамильтонианом $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x_1, \ldots, x_N) \tag{11}$$

и матрицей I

$$\frac{dx_i}{dt} = I\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}\right)^*. \tag{12}$$

Обычно рассматривается *парное взаимодействие*

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} H(x_i, x_l), \tag{13}$$

когда гамильтониан $\mathbf{H}$ — это сумма N^2 гамильтонианов H

$$H = H(x', x''), \tag{14}$$

[1] Типичный пример — число Авогадро (1811) $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} = 6\,022 \cdot 10^{20}$.

описывающих взаимодействие двух компонент x' и x''. Слагаемые в (13) отличаются друг от друга только номерами аргументов.

3°. Сумматорные функции А.Я.Хинчина

Последовательное изучение свойств сумматорных функций в статистических вопросах восходит к работе А.Я.Хинчина (Математические основания статистической механики. М., Гостехиздат, 1943) и связано с обобщением на функции Закона Больших Чисел, хотя роль симметрических функций известна еще из алгебры — формулы Ф.Виета (~1590).

В нашей задаче сумматорные функции возникают сами собой, как следствие применения метода Фурье разложения функций в ряд по ортогональному базису[1].

Итак, рассмотрим произвольный (пока!) базис $\{y_\alpha(x)\}$ в пространстве функций одной переменной x и разложим гамильтониан взаимодействия $H(x',x'')$ по соответствующему базису $\{y_\alpha(x')y_\beta(x'')\}$ в пространстве функций двух переменных:

$$H(x',x'') = \sum_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} y_\alpha(x')y_\beta(x'') . \tag{15}$$

Подставляя полученное выражение в гамильтониан системы $\mathbf{H}$, получаем:

$$\mathbf{H} = \sum_{il\alpha\beta} H^{\alpha\beta} y_\alpha(x_i)y_\beta(x_l) = \sum_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \left[\sum_i y_\alpha(x_i)\right]\left[\sum_l y_\beta(x_l)\right] \tag{16}$$

Сумматорные функции

$$Y_\alpha = \sum_{i=1}^{N} y_\alpha(x_i) \tag{17}$$

возникают, таким образом, автоматически, при изменении[2] порядка суммирования. Выражая гамильтониан $\mathbf{H}$ через новые переменные Y_α

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta , \tag{18}$$

приходим к важному выводу.

Гамильтониан есть квадратичная функция макровеличин Y_α, и эта квадратичность есть прямое следствие парности взаимодействия.

Отметим также, что коэффициенты квадратичной формы (18) совпадают с коэффициентами Фурье $H^{\alpha\beta}$ разложения гамильтониана взаимодействия $H(x',x'')$ по базису $\{y_\alpha(x')y_\beta(x'')\}$.

---

[1] Современная модификация — метод Галеркина-Ритца — не предполагает даже ортогональности.

[2] Отметим сходство этой процедуры с лебеговской схемой интегрирования и переходом к числам заполнения в квантовой статистике.

Сделаем еще одно замечание о производных сумматорной функции. Дифференцируя Y_α по x_i, получаем:

$$\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_i}=\frac{dy_\alpha(x_i)}{dx_i} . \tag{19}$$

Величина Y_α содержит N слагаемых, а производная — лишь одно, ибо остальные слагаемые не зависят от x_i и обращаются в нуль при дифференцировании. Это обстоятельство тесно связано с характером асимптотики (при $N\to\infty$) сумматорных функций. Каждая сумматорная функция порождает (в разных контекстах) три масштаба величин.

Максимальное значение имеет порядок N (по числу слагаемых).

Средняя флуктуация (корень квадратный из интеграла квадрата функции) значительно меньше и имеет порядок $\sqrt{N}$.

И, наконец, производные совсем малы по сравнению с N (порядка единицы), как это видно из (19).

4°. Макродинамика

Запись гамильтониана системы $\mathbf{H}$ в переменных Y

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}(Y) \tag{20}$$

позволяет упростить уравнения движения.

Вычисляя производную $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}=\sum_\beta\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y_\beta}\frac{\partial Y_\beta}{\partial x_i}=\sum_\beta\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y_\beta}\frac{dy_\beta}{dx_i}$$

и подставляя результат в уравнения движения, получим

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_\beta\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y_\beta}I\left(\frac{dy_\beta}{dx_i}\right)^*. \tag{21}$$

Правые части полученных уравнений содержат как скалярные (макро) величины[1] L^β

$$L^\beta=\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y_\beta}, \tag{22}$$

так и векторные (микро) поля $a_\beta(x)$

$$a_\beta(x)=I\left(\frac{dy_\beta}{dx}\right)^*. \tag{23}$$

[1] В дальнейшем употребляется более наглядная запись типа M-переменное» вместо «(макро) переменное» и «μ-поле» вместо «(микро) поле».

В этих обозначениях более четко видна структура уравнений движения

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_\beta L^\beta a_\beta(x_i), \tag{24}$$

подсказывающая идею выделения *макродинамики* (эволюции Y_α) из огромного множества ($N\gg 1$) μ-движений x_i.

Дифференцируя по времени соотношение (17), определяющее M-величину Y_α,

$$\frac{dY_\alpha}{dt}=\sum_i \frac{dy_\alpha}{dx_i}\frac{dx_i}{dt},$$

и подставляя из (24) найденные значения производных x_i, получаем:

$$\frac{dY_\alpha}{dt}=\sum_i \frac{dy_\alpha}{dx_i}\left[\sum_\beta L^\beta a_\beta(x_i)\right]=\sum_\beta L^\beta\left\{\sum_i \frac{dy_\alpha}{dx_i}a_\beta(x_i)\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках есть сумматорная функция, каждое слагаемое которой может быть разложено по базису

$$\frac{dy_\alpha}{dx}a_\beta(x)=\sum_\gamma I^\gamma_{\alpha\beta}y_\gamma(x). \tag{26}$$

Здесь постоянные $I^\gamma_{\alpha\beta}$ (коэффициенты Фурье) определяются только свойствами базиса $\{y_\alpha(x)\}$ и никак не связаны с исходными уравнениями. Наиболее отчетливо это видно, если вспомнить определение μ-поля $a_\beta(x)$ (23) и подставить его в (26):

$$\frac{dy_\alpha}{dx}I\left(\frac{dy_\beta}{dx}\right)^*=I^\gamma_{\alpha\beta}y_\gamma(x). \tag{27}$$

Суммирование по всем компонентам x_i в (25) с учетом формулы (26) приводит к полному исключению μ-переменных, и мы получаем уравнения *макродинамики*:

$$\frac{dY_\alpha}{dt}=I^\gamma_{\alpha\beta}Y_\gamma L^\beta.$$

5°. I-алгебры. Квадратичные многочлены

Предположение о парности взаимодействия, как видно из вывода, можно не вводить. Значительно серьезнее другое ограничение.

Проведенный анализ не претендует на формальную строгость, так как игнорировались вопросы сходимости возникающих рядов. Однако, эти выкладки становятся вполне строгими для важного случая **I**-*алгебр*.

Определение:

Конечномерное подпространство в пространстве функций с базисом $\{y_\gamma(x)\}$ называется **I**-*алгеброй, если оно замкнуто относительно операции* **I**-*произведения, определенной следующим образом:*

$$y_\alpha \circ y_\beta = \frac{dy_\alpha}{dx} I \left(\frac{dy_\beta}{dx}\right)^* = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} y_\gamma(x). \tag{29}$$

Коэффициенты разложения $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ называются структурными константами алгебры.

Непустота множества определяемых объектов есть очевидное требование содержательности определения. В нашем случае пространство квадратичных форм образует алгебру для любой матрицы I. Это вытекает из того, что производная (градиент) квадратичной формы есть линейная форма, а произведение двух линейных форм есть квадратичная форма.

Эту алгебру можно расширить, добавив константу. Другое полезное расширение состоит в добавлении всех линейных функций. Этот пример, демонстрируя непустоту множества **I**-алгебр, далеко не исчерпывает его.

Пример III.

В простейшем случае системы с одной степенью свободы конечная алгебра порождается всего двумя функциями,

$$a(x) = x, \qquad b(x) = \frac{x^2}{2}, \tag{30}$$

к которым мы добавим еще константу. Уже в этом случае возникает содержательная задача.

Выкладки, как это обычно бывает, проще провести заново, нежели использовать готовый результат.

Итак, пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}, \tag{31}$$

где

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(A,B) \tag{32}$$

и

$$A = \sum_i x_i, \qquad B = \sum_i \frac{x_i^2}{2}. \tag{33}$$

Уравнения для переменных x_i в новых обозначениях приобретают вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial A} + x_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial B}, \tag{34}$$

откуда можно вывести (дифференцируя равенства (33) по t), замыкающие систему (34) уравнения макродинамики:

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = N\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial A} + A\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial B} \\ \dfrac{dB}{dt} = A\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial A} + 2B\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial B}. \end{cases} \qquad (35)$$

В уравнениях (35) не использовано предположение о парности взаимодействия (и, следовательно, квадратичности гамильтониана $\mathbf{H}$ по M-переменным A и B). Они справедливы при значительно более общем предположении (32). Заметим, что все уравнения (34) совпадают (с точностью до обозначений) с уравнением μ-движения одной компоненты:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial A} + x\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial B}. \qquad (36)$$

Поэтому система из N уравнений сведена, по существу, к системе трех уравнений (35) и (36). Проинтегрировав (аналитически или численно) систему (35), мы получаем одно линейное уравнение (36) с переменными коэффициентами. Любое решение $x_i(t)$ получается подстановкой надлежащих начальных данных в решение уравнения (36).

Пример IV.

В двумерном случае,

$$x = \binom{p}{q} \qquad (37)$$

возникает пять M-переменных (из алгебры квадратичных многочленов):

$$\begin{matrix} P = \sum p_i & & W = \sum \dfrac{p_i^2}{2} \\ & R = \sum p_i q_i & \\ Q = \sum q_i & & Z = \sum \dfrac{q_i^2}{2}. \end{matrix} \qquad (38)$$

Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \\ \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} \end{cases} \qquad (39)$$

в случае гамильтониана $\mathbf{H}$, зависящего только от M-величин

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(P, Q, R, W, Z), \qquad (40)$$

переписывается в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial Q} - p_i \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial R} - q_i \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial Z} \\ \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial P} + p_i \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} + q_i \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial R} \end{cases} \tag{41}$$

Дифференцируя равенства (38) по t и подставляя соотношения (41), получим уравнения макродинамики:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -N\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial Q} - P\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial R} - Q\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial Z} \\ \dfrac{dQ}{dt} = N\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial P} + P\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} + Q\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial R} \\ \dfrac{dR}{dt} = P\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial P} + 2W\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} - Q\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial Q} - 2Z\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial Z} \\ \dfrac{dW}{dt} = -P\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial Q} - 2W\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial R} - R\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial Z} \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial P} + R\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} + 2Z\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial R} \end{cases} \tag{42}$$

Механизм выделения макродинамических уравнений тот же самый, разумеется, что и в случае I-алгебры общего вида. Однако, результат весьма интересен. Особо отметим важный частный случай механических систем, когда гамильтониан есть сумма кинетической и потенциальной энергии:

$$H = \frac{p_i^2}{2Nm} + U\left(q_i, q_l, \frac{q_i^2}{2}, \frac{q_l^2}{2}\right). \tag{43}$$

В этом случае

$$\mathbf{H} = \frac{1}{m} W + U(Q,Z). \tag{44}$$

и система макродинамических уравнений существенно упрощается:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = -N\dfrac{\partial U}{\partial Q} - Q\dfrac{\partial U}{\partial Z} \\ \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{1}{m}P \\ \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{2}{m}W - Q\dfrac{\partial U}{\partial Q} - 2Z\dfrac{\partial U}{\partial Z} \\ \dfrac{dW}{dt} = -P\dfrac{\partial U}{\partial Q} - R\dfrac{\partial U}{\partial Z} \\ \dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{1}{m}R \end{cases} \tag{45}$$

В задачу настоящей работы не входит анализ поведения системы уравнений макродинамики, однако, следует отметить, что вычислительные эксперименты, проведенные с системой (45), обнаружили большое разнообразие возникающих в ней динамических режимов.

6°. «Расцепление» компонент

Полученные результаты допускают наглядное истолкование. Изложим (конспективно) основные идеи анализа.

Пусть имеется произвольная[1] **I**-алгебра $\{y_\gamma(x)\}$

$$\frac{dy_\alpha}{dx} I \left(\frac{dy_\beta}{dx}\right)^* = I^\gamma_{\alpha\beta} y_\gamma(x) \qquad (\mathbf{I})$$

и гамильтониан **H**

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(Y_1, \ldots, Y_k), \qquad (\mathbf{H})$$

зависящий только от M-переменных Y

$$Y_\alpha = \sum_i y_\alpha(x_i), \qquad (Y)$$

и являющийся (в случае парного взаимодействия) квадратичным многочленом от своих аргументов.

Система (**I**, **H**), порожденная матрицей I и гамильтонианом **H**

$$\frac{dx_i}{dt} = I \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}\right)^* \qquad (x_i)$$

и записанная в новых переменных,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_\beta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y_\beta} I \left(\frac{dy_\beta}{dx_i}\right)^*,$$

допускает «выщепление» M-движений Y:

$$\frac{dY_\alpha}{dt} = I^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y_\beta}. \qquad (M)$$

Более того, при известных Y система μ-движений x_i распадается на *независимые* движения. Все уравнения оказываются копиями (с точностью до обозначения переменных) одного стандартного уравнения для x:

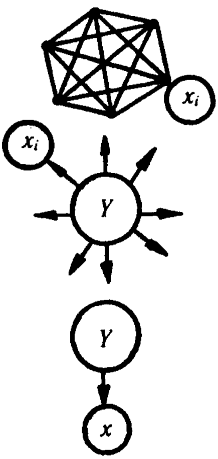
---

[1] Напомним еще раз, что **I**-алгебра по определению конечна и ее размерность k не зависит от количества компонент N.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y_a} I \left(\frac{dy_a}{dx} \right)^*. \qquad (\mu)$$

Траектория системы в многомерном M-пространстве $(x_1, \ldots, x_N)$ может быть, поэтому, *точно* заменена набором из N траекторий (отличающихся только начальными данными) в стандартном μ-пространстве x.

Полезно иллюстрировать схемой этапы анализа.



В исходной системе каждая компонента взаимодействует с каждой.

Всего N^2 связей.

Введение «лишних» M-переменных Y позволяет заменить взаимодействие действием Y на x_i.

Остается N связей.

Все компоненты одинаковы. Поэтому движение в многомерном M-пространстве равнозначно движению «тучи точек» в стандартном μ-пространстве x.

Существенна только одна связь.

Для «расцепления» компонент достаточно знания одной траектории M-системы. Вычисление такой траектории не представляет проблемы для современной вычислительной техники, так как размерность[1] M-системы не зависит от N, хотя само число N и может входить в коэффициент M-системы, что мы уже видели в примерах III и IV.

7°. Эквивалентное поле и макродинамическое равновесие

Уравнение (μ) удобно переписать в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = I \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^*, \qquad (x)$$

вводя «эквивалентное» поле h:

$$h(x, Y) = \sum_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y_a} y_a(x). \qquad (h)$$

Поэтому движение x можно интерпретировать, как движе-

[1] Мрачный пессимизм словосочетания «проклятие размерности» не относится к M-системе. Введение «лишних» макропеременных Y может, поэтому, рассматриваться как «снятие заклятия».

ние во«внешнем» поле h, параметры которого определяются M-величинами Y.

Исследование любых систем обычно начинается с изучения стационарных режимов (а нередко этим и заканчивается, особенно если для практических целей достаточно анализа именно стационарных режимов).

«Треугольная» структура[1] системы уравнений для Y, x

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = f(Y) \\ \dfrac{dx}{dt} = g(Y,x) \end{cases}$$

позволяет ввести понятие ***макродинамического равновесия,***

$$f(Y) = 0, \qquad Y = \text{const},$$

которое означает стационарность только M-системы. Это естественное обобщение понятия «термодинамического равновесия».

В состоянии M-равновесия эквивалентное поле h оказывается не зависящим от времени и система (x) становится автономной.

Весьма правдоподобно, что этот важный частный случай понятия эквивалентного поля соответствует понятию «самосогласованного поля» в физике.

Однако подробный анализ этого интересного вопроса выходит за рамки настоящей публикации.

Стационарное эквивалентное поле (или просто h-поле) интересно еще и тем, что дает простую и наглядную интерпретацию предельного перехода $N \to \infty$.

Каждая траектория исходной системы порождает (как мы видели) N траекторий в пространстве одной компоненты x. Если начальные точки этих траекторий распределены достаточно равномерно, то траектории (в пределе) заполнят все пространство. Следовательно ***фазовый портрет*** системы может быть интерпретирован, как ***предел проекции*** на μ-пространство ***одной*** траектории исходной системы. Эта неожиданная связь обещает интересные результаты в дальнейших исследованиях и существенно расширяет область приложений качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заметим также, что в случае парного взаимодействия правые части уравнений макродинамики всегда квадратичны. Это указывает на глубокое родство обсуждаемых систем с общими билинейными системами (см. Молчанов А.М. Билинейные системы. Препринт. Пущино, ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1982).

---

[1] Состоящая в том, что поведение Y не зависит от x.

8°. Стационарные режимы

Ниже приведены некоторые результаты численных экспериментов с уравнениями макродинамики, за проведение которых автор благодарен А.С.Кондрашову.

В подборе примеров нет претензии на полноту. Из них, однако, видно, что кроме положений равновесия существуют и другие, весьма разнообразные (чтобы не сказать затейливые) стационарные режимы.

Другое замечание касается традиционных методов обработки экспериментальных данных. Обычно строят зависимость от времени для каждой измеряемой величины отдельно (например, электрокардиограмма). При анализе внешнего воздействия (скажем, температуры) опять-таки строят независимые кривые.

Приводимые иллюстрации позволяют поставить на эту тему полезный мысленный эксперимент. На каждой странице (кроме шести проекций траектории макродвижения на различные плоскости) вверху расположен график $W(t)$.

Будем считать эту величину W «наблюдаемой» в отличие от «скрытых переменных» P, Q, R, Z.

Много ли можно узнать о движении пятимерного вектора P, Q, R, Z, W по поведению «наблюдаемой» величины W предоставляем судить читателю.

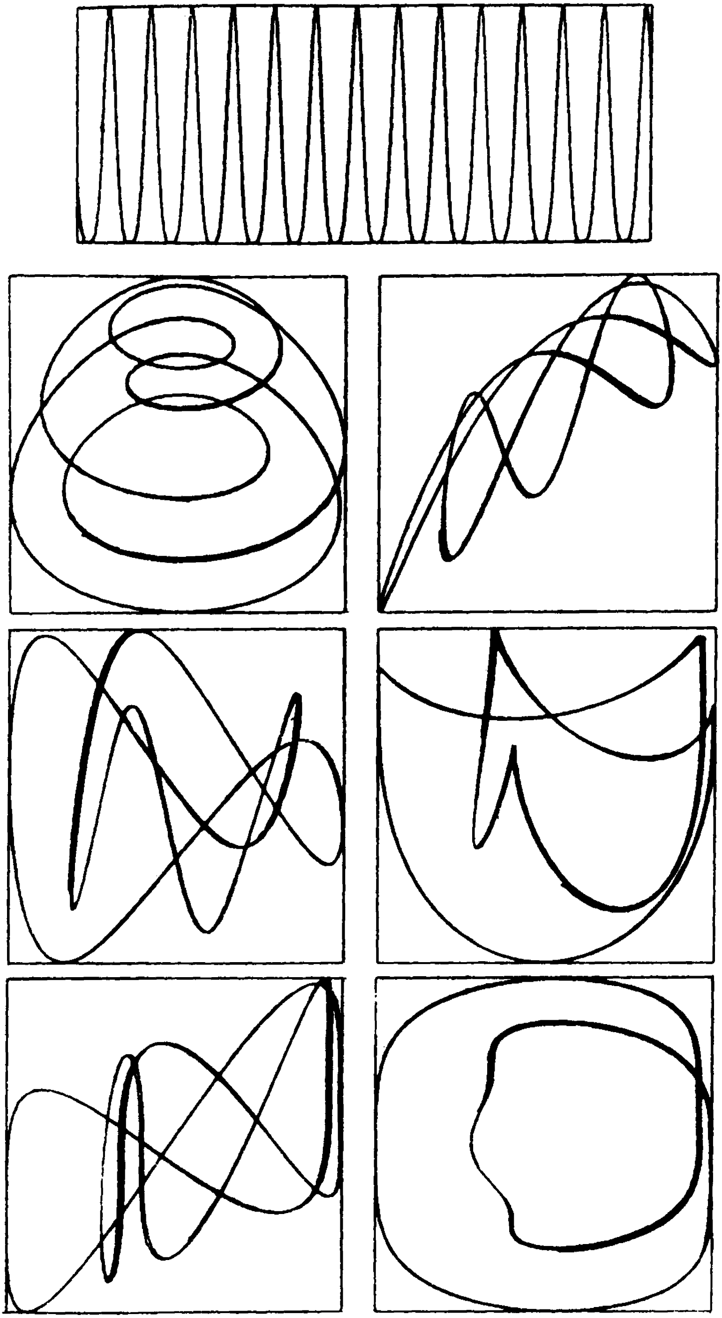


Рис. 1

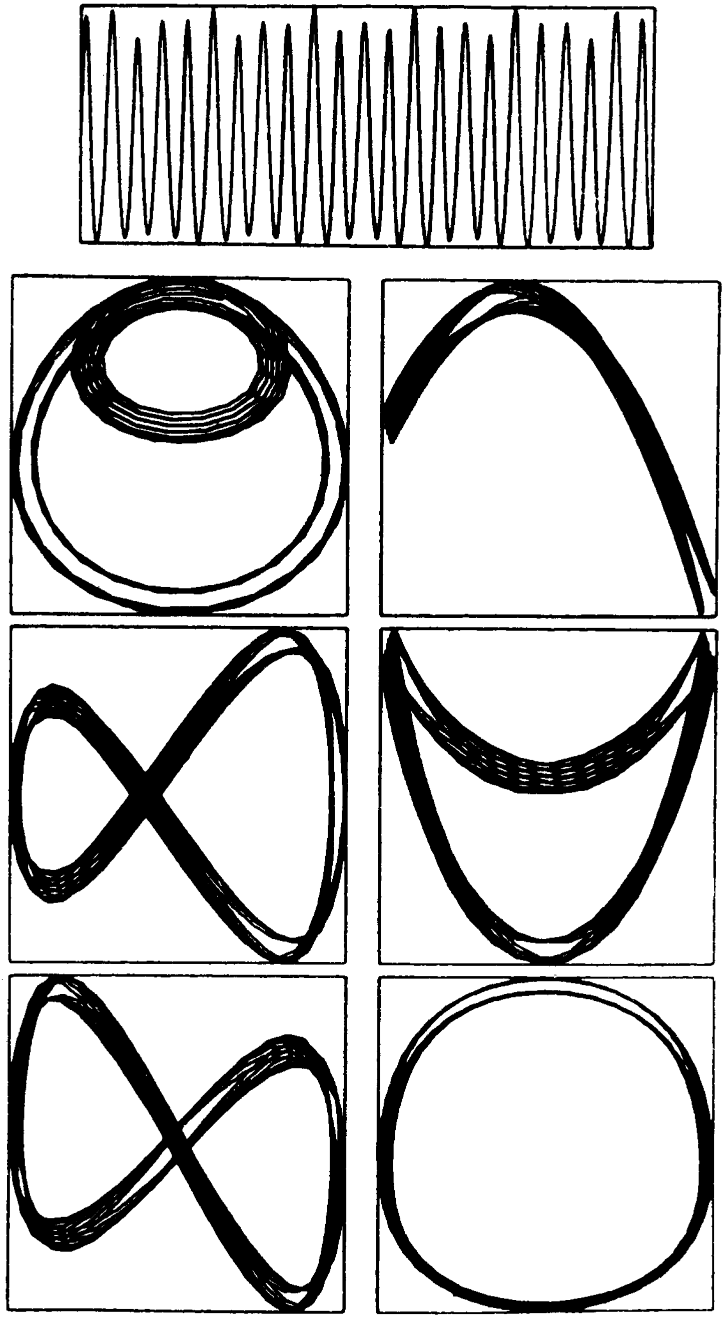


Рис. 2

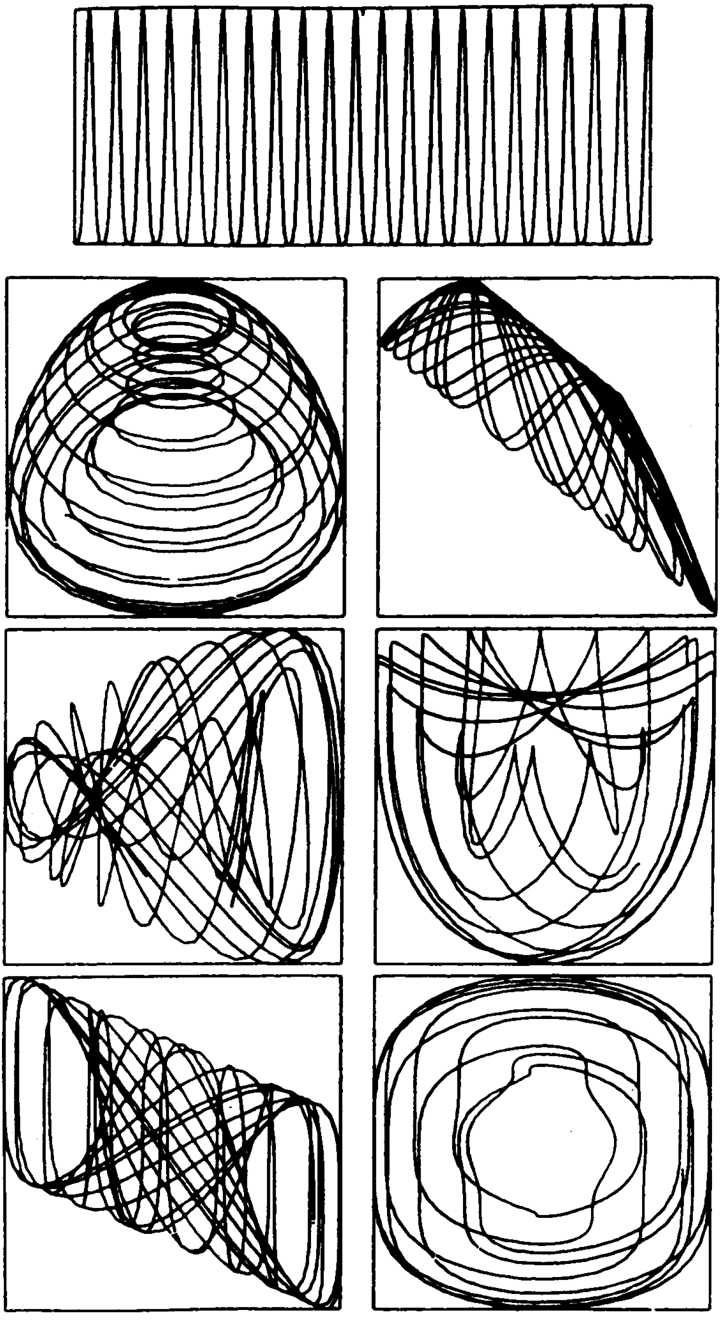


Рис. 3

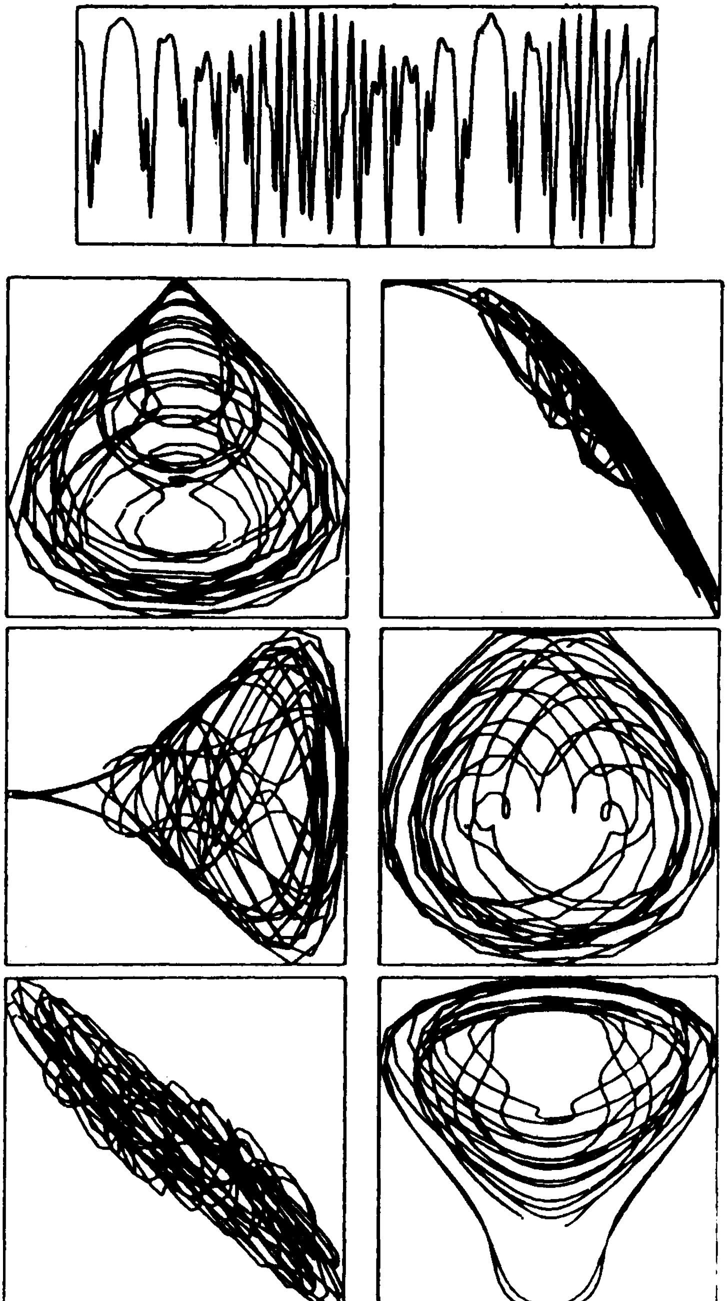


Рис. 4